Applications - Chapitre 4

Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

EPFL

A.4.1 Equation différentielle du deuxième ordre

- Equation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre : équation linéaire liant une fonction $f(t)$ et sa dérivée seconde :

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = -\,\alpha^2 f(t) - \beta \qquad \text{où} \qquad \alpha, \beta = \text{cstes} \neq 0 \tag{A.4.1}$$

  on considère uniquement le cas le plus simple où il n'y a pas de dérivée première.

- Equation différentielle : $(A.4.1)$ remise en forme $(\alpha \neq 0)$

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = -\,\alpha^2 \left(f(t) + \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \tag{A.4.2}$$

- Changement de "variable" : fonction $g(t)$ rendant l'équation différentielle $(A.4.2)$ homogène :

$$g(t) = f(t) + \frac{\beta}{\alpha^2} \tag{A.4.3}$$

- Dérivée seconde : changement de "variable" $(A.4.3)$

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right) = \frac{d^2 f}{dt^2}(t) \tag{A.4.4}$$

- Equation différentielle homogène : à partir de l'équation différentielle inhomogène en substituant $(A.4.3)$ et $(A.4.4)$ dans $(A.4.2)$:

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = -\,\alpha^2\, g(t) \qquad (A.4.5)$$

- Proposition : équation différentielle homogène du premier ordre

$$\frac{dg}{dt}(t) = \sqrt{-\,\alpha^2}\, g(t) \qquad (A.4.6)$$

Démonstration :

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dg}{dt}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{-\,\alpha^2}\, g(t)\right) = \sqrt{-\,\alpha^2}\,\frac{dg}{dt}(t) = -\,\alpha^2\, g(t)$$

- Solutions complexes particulières : équation différentielle $(A.4.6)$

$$g(t) = c\,\exp\left(\sqrt{-\,\alpha^2}\, t\right) = c\,\exp\left(\pm i\,\alpha\, t\right) \qquad (A.4.7)$$

- Fonctions trigonométrique : formule d'Euler inverse

$$\cos\left(\alpha\, t\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\,\alpha\, t\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(i\,\alpha\, t\right) + \exp\left(-\,i\,\alpha\, t\right)\right) \qquad (A.4.8)$$

$$\sin\left(\alpha\, t\right) = \mathrm{Im}\left(\exp\left(i\,\alpha\, t\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\,\alpha\, t\right) - \exp\left(-\,i\,\alpha\, t\right)\right)$$

- Solution réelle : combinaison linéaire de solutions réelles particulières

$$g\left(t\right) = a\cos\left(\alpha\, t\right) + b\sin\left(\alpha\, t\right) \qquad (A.4.9)$$

- Dérivée temporelle de la solution réelle :

$$\frac{dg}{dt}\left(t\right) = -\,\alpha\, a\sin\left(\alpha\, t\right) + \alpha\, b\cos\left(\alpha\, t\right) \qquad (A.4.10)$$

- Conditions initiales : $(A.4.9)$ et $(A.4.10)$ évalués en $t = 0$

$$g\left(0\right) = a \qquad \text{et} \qquad \frac{dg}{dt}\left(0\right) = \alpha\, b \qquad (A.4.11)$$

- Solution réelle : $(A.4.11)$ dans $(A.4.9)$

$$g\left(t\right) = g\left(0\right)\cos\left(\alpha\, t\right) + \frac{1}{\alpha}\,\frac{dg}{dt}\left(0\right)\sin\left(\alpha\, t\right) \qquad (A.4.12)$$

- Solution réelle : équation différentielle homogène

$$g(t) = g(0)\cos(\alpha\, t) + \frac{1}{\alpha}\,\frac{dg}{dt}(0)\sin(\alpha\, t) \qquad (A.4.12)$$

- Changement de “variable” : inverse

$$f(t) = g(t) - \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad (A.4.13)$$

- Conditions initiales : $(A.4.13)$ et dérivée évaluées en $t = 0$

$$g(0) = f(0) + \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad (A.4.14)$$

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{df}{dt}(0) \qquad (A.4.15)$$

- Solution réelle : équation différentielle inhomogène

$$f(t) = \left(f(0) + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\cos(\alpha\, t) + \frac{1}{\alpha}\,\frac{df}{dt}(0)\sin(\alpha\, t) - \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad (A.4.16)$$

- Solution réelle : équation différentielle inhomogène

$$f(t) = \left(f(0) + \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \cos(\alpha\, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{df}{dt}(0) \sin(\alpha\, t) - \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad (A.4.16)$$

- Changement de variable : $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\delta \in [0, 2\pi)$

$$f(0) + \frac{\beta}{\alpha^2} = A\cos(\delta) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\alpha}\frac{df}{dt}(0) = -\,A\sin(\delta) \qquad (A.4.17)$$

- Solution réelle : $(A.4.17)$ dans $(A.4.16)$

$$f(t) = A\left(\cos(\alpha\, t)\cos(\delta) - \sin(\alpha\, t)\sin(\delta) \right) - \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad (A.4.18)$$

- Formule de trigonométrie : angles $\alpha\, t$ et δ

$$\cos(\alpha\, t + \delta) = \cos(\alpha\, t)\cos(\delta) - \sin(\alpha\, t)\sin(\delta) \qquad (A.4.19)$$

- Solution réelle : $(A.4.19)$ dans $(A.4.18)$ et $(A.4.13)$

$$f(t) = A\cos(\alpha\, t + \delta) - \frac{\beta}{\alpha^2} \qquad \text{où} \qquad g(t) = A\cos(\alpha\, t + \delta) \qquad (A.4.20)$$

- Mouvement oscillatoire vertical : axe vertical Ox orienté vers le haut

  1. Position verticale : $f(t) \equiv x(t)$
  2. Position verticale relative : $g(t) \equiv y(t)$
  3. Angle de déphasage nul : $\delta \equiv 0$
  4. Pulsation et champ gravitationnel : $\alpha \equiv \omega$ et $\beta \equiv g$
  5. Amplitude : $A \equiv C$

$$(A.4.2) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\,\omega^2\left(x(t) + \frac{g}{\omega^2}\right)$$

$$(A.4.3) \quad \Rightarrow \quad y(t) = x(t) + \frac{g}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = y(t) - \frac{g}{\omega^2}$$

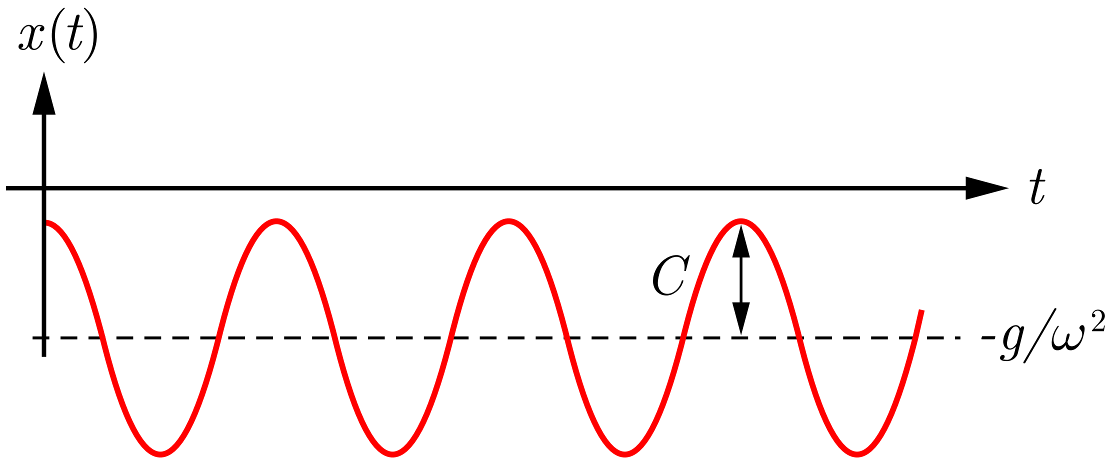
$$(A.4.20b) \quad \Rightarrow \quad y(t) = C\cos(\omega t)$$

$$(A.4.20a) \quad \Rightarrow \quad x(t) = C\cos(\omega t) - \frac{g}{\omega^2}$$

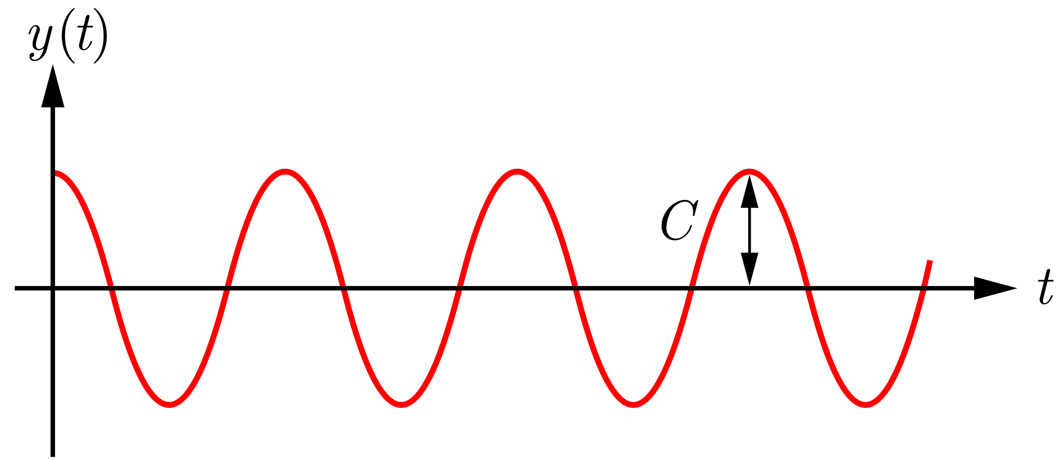
- Interprétation physique :

$$x\,(t) = y\,(t) - \frac{g}{\omega^2}$$

1. $x\,(t)$ est la position par rapport à l'origine correspondant à la position d'équilibre du ressort à vide.



2. $y\,(t)$ est la position par rapport à l'origine correspondant à la position d'équilibre du ressort lorsqu'une masse est suspendue au ressort.

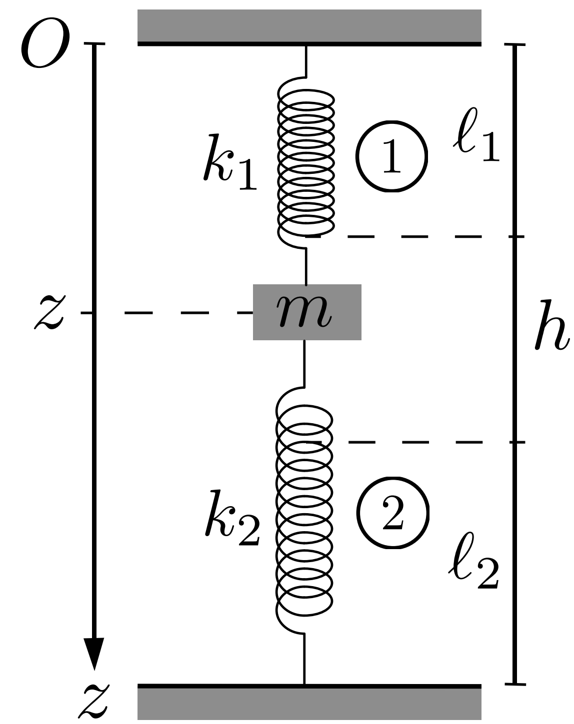


A.4.1 Equation différentielle du deuxième ordre

A.4.2 Oscillateur harmonique vertical

A.4.3 Oscillateur à double ressort

- Longueur à vide des ressorts 1 et 2 : ℓ_1, ℓ_2



- Forces extérieures (masse m) :
  1. Poids : $\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\,\hat{\boldsymbol{z}}$
  2. Force élastique 1 : $\boldsymbol{F}_{e_1} = -\,k_1\,(z - \ell_1)\,\hat{\boldsymbol{z}}$
  3. Force élastique 2 : $\boldsymbol{F}_{e_2} = k_2\,(h - z - \ell_2)\,\hat{\boldsymbol{z}}$
- Accélération (masse m) : $\boldsymbol{a} = \ddot{z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$
- Loi du mouvement (masse m) :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_{e_1} + \boldsymbol{F}_{e_2} = m\,\boldsymbol{a}$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{z}} : \quad mg - k_1\,(z - \ell_1) + k_2\,(h - z - \ell_2) = m\ddot{z} \tag{A.4.21}$$

$$\boxed{\ddot{z} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) z - \left(g + \frac{k_2\,(h - \ell_2) + k_1\ell_1}{m}\right) = 0} \tag{A.4.22}$$

- Equation du mouvement : $(A.4.22)$ remise en forme

$$\ddot{z} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)\left(z - \frac{mg + k_2\left(h - \ell_2\right) + k_1\ell_1}{k_1 + k_2}\right) = 0 \qquad (A.4.23)$$

- Changement de variable : pour rendre homogène $(A.4.23)$

$$x = z - \frac{mg + k_2\left(h - \ell_2\right) + k_1\ell_1}{k_1 + k_2} \equiv z - z_0 \qquad (A.4.24)$$

- Changement de variable : dérivée temporelle seconde

$$\ddot{x} = \ddot{z} \qquad (A.4.25)$$

- Equation du mouvement : $(A.4.24)$ et $(A.4.25)$ dans $(A.4.23)$

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) x = 0 \qquad (A.4.26)$$

- La distance $z_0 > 0$ correspond à la coordonnée de la position d'équilibre de la masse m (i.e. $x = 0$). Ainsi, la coordonnée x représente la déviation par rapport à équilibre.

- Oscillateur harmonique autour de la position d'équilibre $z = z_0$ où $x = 0$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) x = 0 \tag{A.4.26}$$

- Pulsation :

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{A.4.27}$$

Les constantes élastiques des ressorts s'additionnent : $k = k_1 + k_2$

- Période d'oscillation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \tag{A.4.28}$$

- Equations horaires :

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \tag{A.4.29}$$

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi) + z_0 \tag{A.4.30}$$